

Mecánica Estadística

Evaluación continua. Primer control

27/03/2026

Problemas

Nota: Debe elegirse uno de los dos ejercicios propuestos a continuación.

1. Susceptibilidad magnética.

Considérese un sistema de N_{Δ} trímeros de espines no interactuantes, localizados en un volumen V , cada uno de los cuales está descrito por el Hamiltoniano

$$\hat{H} = -J(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \mu_0 H(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Las polarizaciones individuales de espín σ_i son variables de Ising de dos estados posibles, con $\sigma_i = \pm 1$.

- (a) Calcúlense los niveles de energía de un trímero ($|111\rangle$, $|11-1\rangle$, etc.) y sus degeneraciones y encuentre la función de partición de un solo trímero z_1 y la del sistema global $Z_{N_{\Delta}}$.

- (b) Encuéntrese la magnetización por trímero:

$$m = \mu_0 \langle \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \rangle = k_B T \left(\frac{\partial \ln z_1}{\partial H} \right)_{\beta}$$

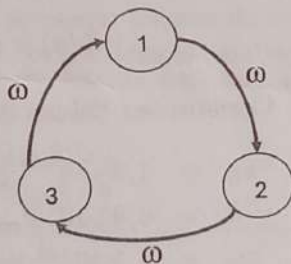
- (c) Teniendo en cuenta que la densidad de magnetización es $M = N_{\Delta} m / V$, hágase una aproximación de esta magnitud a $H \simeq 0$ y, posteriormente, calcúlese la susceptibilidad a campo nulo.

$$\chi(T) = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{H=0}.$$

- (d) Interpretéense físicamente los resultados de los apartados (b) y (c) en los límites

$$J \rightarrow +\infty, \quad J \rightarrow 0, \quad \text{y} \quad J \rightarrow -\infty.$$

2. *Matriz de tasa con autovalores complejos: one step-cíclico.* Considérese un sistema de tres niveles de energía con probabilidades de transición ω como se muestra en la figura.



- (a) Escribase la ecuación maestra y la matriz de tasa.
- (b) Calcúlense los autovalores de la matriz de transición y la evolución temporal de las probabilidades de cada estado si $\vec{P}(t=0) = (1, 0, 0)$.
- (c) Analícese explícitamente el comportamiento de $\vec{P}(t)$ en el límite $t \rightarrow \infty$.

Relaciones matemáticas de posible utilidad:

Aproximaciones

$$\ln N! \approx N \ln N - N; \text{ para } N \rightarrow \infty$$

$$\ln(1 + \alpha x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\alpha x)^n$$

$$\ln(1 - \alpha x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n}; \text{ para } 0 < x < 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x; \text{ para } |x| \ll 1$$

Función Γ

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx;$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n (n!)} \sqrt{\pi}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Función ζ de Riemann

$$g_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

$$g_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \equiv \zeta(k)$$

$$\frac{dg_k(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} g_{k-1}(\lambda)$$

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1,46$$

$$\zeta(1) \rightarrow \infty$$

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2,61$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) \approx 1,20$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$f_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\lambda^n}{n^k}$$

Integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2}; \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{2\alpha} I_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \operatorname{erf}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1) \zeta(n+1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = (1 - 2^{-n}) \Gamma(n+1) \zeta(n+1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 1$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{a^{-n/2-1/2}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Varios

Volumen de una hipersfera de radio r en D dimensiones:

$$V_D = \frac{r^D \pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)}$$

Función de Langevin

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

Constantes físicas de interés

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/mol K Cte. Boltzmann}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Cte. Planck } \mathcal{J} \cdot \mathcal{S}$$

$$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg masa del electrón}$$

$$m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg masa del neutrón}$$

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg masa del protón}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C carga del electrón}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \text{ velocidad de la luz}$$

$$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \text{ magnetón nuclear}$$

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \text{ magnetón de Bohr}$$